Jeg er den største*

Vagn Lundsgaard Hansen

Institut for Matematik
Danmarks Tekniske Universitet
Bygning 303
DK–2800 Lyngby
V.L.Hansen@mat.dtu.dk

Optimalitetsbetragtninger optræder i næsten alle fysiske og teknologiske designproblemer. Optimal design af strukturer (stivere, plader etc.), som på den mest effektive måde udnytter de grundlæggende egenskaber ved materialer, er et vigtigt forskningsområde i moderne teknologi, og dog bliver optimalitetsspørgsmål sjældent rejst i folkeskolen som matematiske spørgsmål.

I denne artikel vil jeg fortælle historien om firkanterne med en fast omkreds, der konkurrerede om at omslutte det største areal. Historien er en introduktion til det isoperimetriske problem og kan præsenteres relativt tidligt i skolesystemet. Historien kan let sættes op som et lille skuespil med elever til at spille rollen af de forskellige firkanter.

Annoncering af en konkurrence

I matematikkens verden blev det engang annonceret, at der skulle afholdes en konkurrence blandt alle firkanter for at se hvilken firkant der omsluttede det største areal. For at gøre konkurrencen fair skulle firkanterne konkurrere i forskellige klasser, så kun firkanter med den samme omkreds skulle sammenlignes. I annoncen hed det, at *isoperimetriske* firkanter skulle undersøges for at finde ud af hvilken firkant der indeholdt det største areal. Belæste folk vidste, at 'iso' er det græske ord for 'samme' og at 'perimeter' er afledt af det græske ord 'peri', der betyder 'rundt om' og 'metron', der betyder 'mål', og derfor, at perimeteren af en firkant er summen af længden af siderne; det som vi også kalder omkredsen af firkanten. De vidste også, at matematikken skylder grækerne meget.

Annonceteksten var formuleret som et matematisk problem.

Problem: Blandt alle firkanter med en foreskreven omkreds find den som omslutter det største areal.

Alle firkanterne så frem til dagen, da konkurrencen skulle finde sted. Og alle så sig selv som vinderen. Nogle havde en indadvendt vinkel, nogle var parallelogrammer, andre var rektangler og mange havde sider af forskellig længde. I baggrunden så man kvadratet.

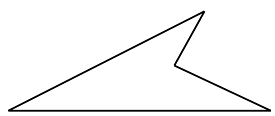
---

* Oversættelse af forfatterens artikel *I am the Greatest*, Mathematics in School **25** (1996), 10–11.

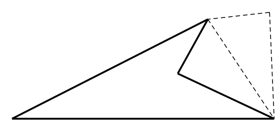
Konkurrencen

Endelig oprandt dagen for konkurrencen. Dommeren i konkurrencen kaldte alle firkanter med den foreskrevne omkreds L frem.

En firkant med omkreds L og en indadvendt vinkel som i Figur 1 trådte frem, præsenterede sig selv som Hr. Konkav og sagde: "Jeg omslutter det største areal." Dommeren smilede og sagde: "Nej, Hr. Konkav, det kan ikke være sandt, for ved at spejle din indbukling til en udbukling, kan jeg frembringe en firkant med et større areal end dig, men stadig med omkreds L." Dommeren lavede rent faktisk en figur (Figur 2) så Hr. Konkav selv kunne indse det.



Figur 1

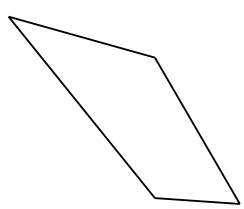


Figur 2

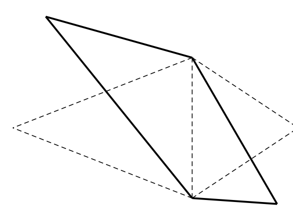
Dommeren fortalte Hr. Konkav, at da den ikke var en konveks firkant, det vil sige den ikke indeholdt begge sine diagonaler, kunne den ikke gøre sig håb om at omslutte det største areal. Som en konsekvens heraf bad dommeren alle firkanter, der ikke var konvekse, om at trække sig tilbage fra konkurrencen, da ingen af dem havde nogen chance for at omslutte det største areal.

Tilbage i konkurrencen var nu alle konvekse firkanter med omkreds L.

Så trådte Hr. Skævben (Figur 3), som havde nabosider af uens længde, frem og erklærede, at han var den firkant, som omsluttede det største areal. Dommeren kastede et kort blik på den og delte den så pludseligt ved en diagonal som i Figur 4. Hr. Skævben blev forvirret og meget skuffet, da dommeren sagde: "Nej, Hr. Skævben, du er ikke den firkant som omslutter det største areal, for ved at erstatte dine nabosider af uens længde med sider af samme længde, kan jeg frembringe en firkant med et større areal end dig og stadig med omkreds L."



Figur 3



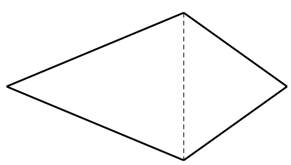
Figur 4

Hr. Skævben kunne ikke helt forstå det, men dommeren bad ham gå hjem og overbevise sig selv om, at en trekant med fastholdt grundlinje og summen af de to andre sider en fast konstant omslutter det største areal netop når det er en ligebenet trekant over grundlinjen. Dommeren fortalte også Hr. Skævben, at han kunne overbevise sig om dette ved at bemærke, at hjørnet over for grundlinjen i en sådan trekant må ligge på en ellipse med endepunkterne for grundlinjen som brændpunkter, og som en konsekvens heraf, at højden på grundlinjen er størst mulig netop når trekanten er ligebenet. Hr. Skævben måtte gøre nogle studier før han var overbevist, men til sidst var han.

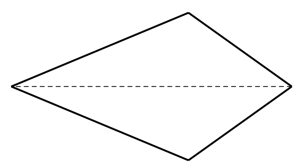
Efter episoden med Hr. Skævben kunne dommeren konkludere, at for at finde ud af hvilken firkant, der omslutter det største areal, behøvede han kun at tage de konvekse firkanter i betragtning, som ved en diagonal kan deles i to ligebenede trekanter, som i Figur 5. Tilbage i konkurrencen var herefter kun sådanne firkanter med omkreds L.

Hr. Drage førte sig ivrigt frem. Han var en firkant som i Figur 5 med omkreds L, som ved en diagonal kunne deles i to ligebenede trekanter med de to par af ben af forskellig længde. Hr. Drage sagde: "Nu da alle de andre er blevet sendt bort, må det klart være mig, som omslutter det største areal."

Dommeren betragtede Hr. Drage ganske nøje. Pludselig sagde han "aha" og delte ham ved den anden diagonal som vist i Figur 6. Hr. Drage fik et chok og mens han var ved at komme sig igen, hørte han dommeren sige, at Hr. Drage ikke omsluttede det største areal, når det kom til stykket, idet man kunne lave en firkant med et endnu større areal ved erstatte de to symmetriske trekanter med diagonalen som grundlinje med ligebenede trekanter. I erkendelse af at dette var sandt, trådte Hr. Drage og alle hans ligemænd ud af konkurrencen.

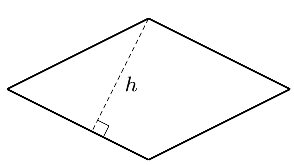


Figur 5

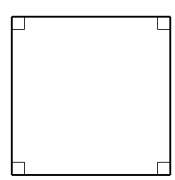


Figur 6

Tilbage i konkurrencen var herefter kun firkanterne med alle fire kanter af samme længde. Hr. Rhombe (Figur 7) trådte frem og sagde: "Det er forholdsvis let at regne arealet ud af mig, for det er netop produktet af min højde h og min kantlængde." "Ja," sagde dommeren, "det er rigtigt, og ved du så hvem der er vinderen?" Efter et kort øjeblik sagde Hr. Rhombe: "Da mit areal er størst, når min højde h er størst, må jeg omslutte det største areal netop når alle mine vinkler er rette vinkler." "Absolut korrekt", sagde dommeren, "og så er du jo et kvadrat (Figur 8)."



Figur 7



Figur 8

Dommeren tog herefter mikrofonen og erklærede:

> *Blandt alle firkanter med en foreskreven omkreds omslutter kvadratet det største areal.*

Konkurrencen var forbi. Firkanterne tog hjem. Det isoperimetriske problem for firkanter var løst. Kvadratet var vinderen. Og sådan har det altid været og sådan vil det altid være, men nu var det hævet over enhver tvivl. I matematikken kalder man denne kendsgerning om kvadratet for en *sætning* og den givne forklaring for et *bevis.*

Det isoperimetriske problem for lukkede polygoner og kurver

På en eller anden måde er det isoperimetriske problem lidt vanskeligere for trekanter end for firkanter. Problemet kan formuleres på følgende måde: Blandt alle trekanter med en foreskreven omkreds find den trekant som omslutter det største areal.

Problemet kan gribes an på følgende måde. Vi starter ud med en vilkårlig trekant med foreskreven omkreds L. Ved en iterativ proces kan vi nu konstruere en følge af trekanter med fast omkreds L, men med voksende areal, ved på skift at lave trekanten ligebenet over hver af siderne. Denne (uendelige) følge af trekanter nærmer sig i grænsen den ligesidede trekant med omkreds L. Idet arealet af en trekant afhænger kontinuert af trekantens form (Herons formel), følger det, at den ligesidede trekant er den trekant, som omslutter det største areal blandt alle trekanter med en foreskreven omkreds L.

Det isoperimetriske problem for generelle n-kanter behøver lidt mere maskineri; jf. [2]. Men resultatet er som man vil vente på nuværende tidspunkt, nemlig:

Sætning 1. Blandt alle lukkede polygoner med n sider og med en foreskreven omkreds omslutter den regulære n-kant det største areal.

For lukkede kurver i planen uden selvgennemskæringer og med endelig længde (rektificerbare Jordan-kurver) har man det generelle isoperimetriske problem. I dette tilfælde er det cirklen som er løsningen.

Sætning 2. Blandt alle lukkede kurver i planen uden selvgennemskæringer og med en foreskreven omkreds (rektificerbare Jordan-kurver) er det cirklen som omslutter det største areal.

I [4] beskrives et fysisk eksperiment, hvorved man kan demonstrere, at cirklen omslutter det størst mulige areal i forhold til omkredsen.

I den korte litteraturliste nedenfor kan man finde andre optimeringsproblemer fra geometrien med forbindelse til fænomener fra den virkelige verden.

Litteratur

[1] H.G. Eggleston. *The Isoperimetric Problem.* Kapitel 7 i *Exploring University Mathematics 1* (N.J. Hardiman, ed.), Pergamon Press, 1967.

[2] V.L. Hansen. *Temaer fra Geometrien.* Matematiklærerforeningen, 1992. Udvidet engelsk udgave: *Shadows of the Circle – Conic Sections, Optimal Figures and Non-Euclidean Geometry.* World Scientific, Singapore, 1998.

[3] V.L. Hansen. *Den geometriske dimension.* Nyt Nordisk Forlag, Arnold Busck A/S, 1989. Engelsk udgave: *Geometry in Nature.* A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 1993.

[4] V.L. Hansen. *The Magic World of Geometry – I. The Isoperimetric Problem.* Elemente der Mathematik **49** (1994), 61–65.

[5] S. Hildebrandt and A. Tromba. *Mathematics and Optimal Form.* Scientific Amer. Library, W.H. Freeman and Co., 1985. Revideret og udvidet udgave: *The Parsimonious Universe.* Copernicus, Springer-Verlag New York, Inc., 1996.

[6] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press, 1972.