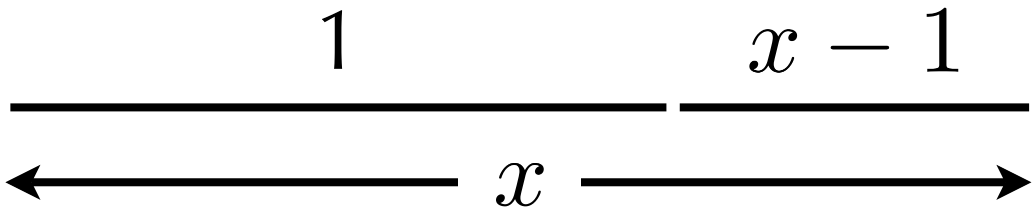
Det Gyldene Snit

Folkeuniversitetet i København
2. oktober 2007

Poul G. Hjorth
Department of Mathematics
Technical University of Denmark



$$x - 1 = \frac{1}{x}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

$$x = 1.618034......$$

$$\phi$$

Bemærk at den reciprokke værdi

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 = 0.618034...$$

med lige så stor ret kunne betegnes

det gyldne snit - de to værdier bruges begge

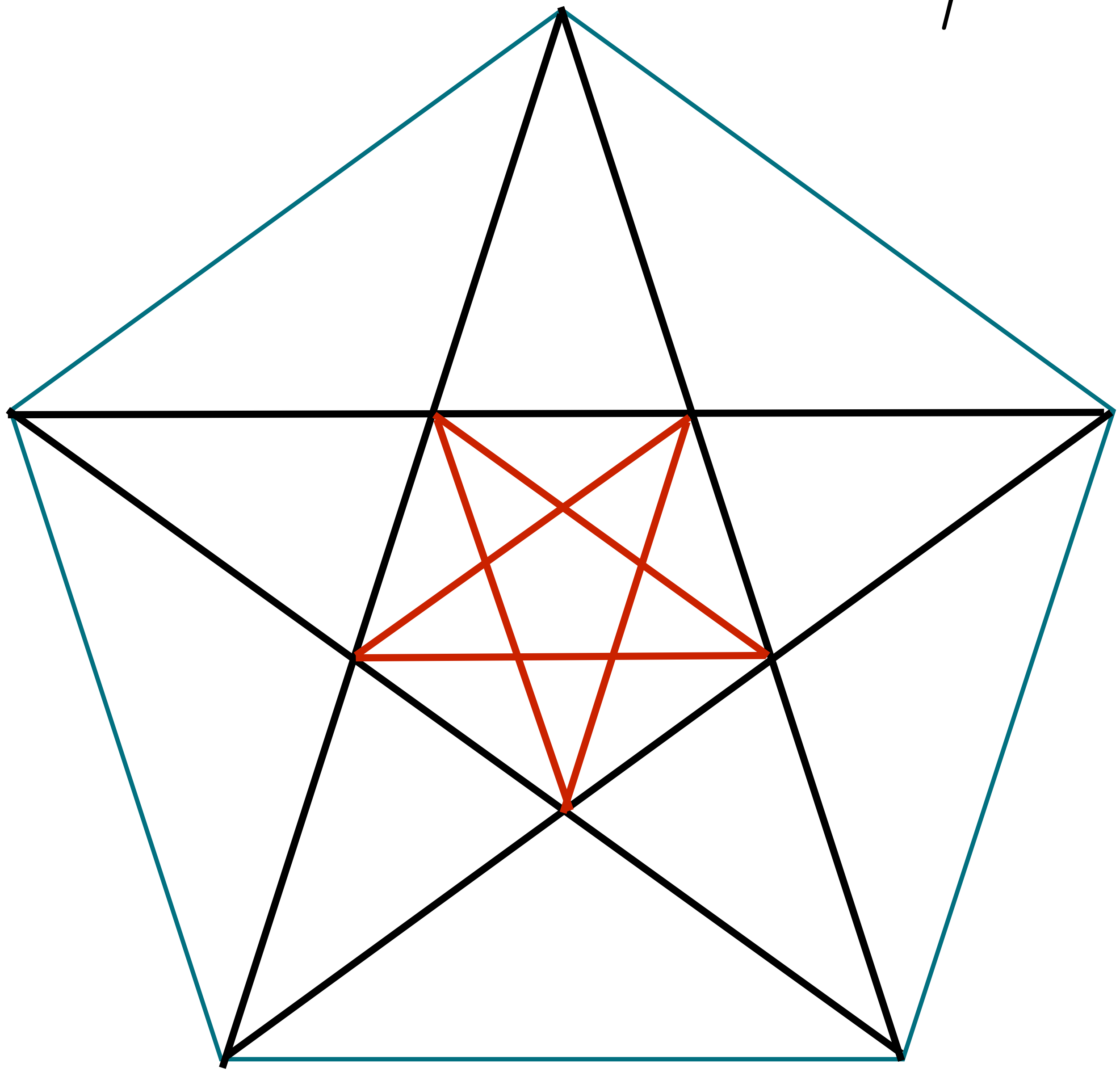
i forskellige sammenhænge.

DTU

ϕ =

1.61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576
28621 35448 62270 52604 62818 90244 97072 07204 18939 11374
84754 08807 53868 91752 12663 38622 23536 93179 31800 60766
72635 44333 89086 59593 95829 05638 32266 13199 28290 26788
06752 08766 89250 17116 96207 03222 10432 16269 54862 62963
13614 43814 97587 01220 34080 58879 54454 74924 61856 95364
86444 92410 44320 77134 49470 49565 84678 85098 74339 44221
25448 77066 47809 15884 60749 98871 24007 65217 05751 79788
34166 25624 94075 89069 70400 02812 10427 62177 11177 78053
15317 14101 17046 66599 14669 79873 17613 56006 70874 80710
13179 52368 94275 21948 43530 56783 00228 78569 97829 77834
78458 78228 91109 76250 03026 96156 17002 50464 33824 37764
86102 83831 26833 03724 29267 52631 16533 92473 16711 12115
88186 38513 31620 38400 52221 65791 28667 52946 54906 81131
71599 34323 59734 94985 09040 94762 13222 98101 72610 70596
11645 62990 98162 90555 20852 47903 52406 02017 27997 47175
34277 75927 78625 61943 20827 50513 12181 56285 51222 48093
94712 34145 17022 37358 05772 78616 00868 83829 52304 59264
78780 17889 92199 02707 76903 89532 19681 98615 14378 03149
97411 06926 08867 42962 26757 56052 31727 77520 35361 39362
10767 38937 64556 06060 59216 58946 67595 51900 40055 59089
50229 53094 23124 82355 21221 24154 44006 47034 05657 34797
66397 23949 49946 58457 88730 39623 09037 50339 93856 21024
23690 25138 68041 45779 95698 12244 57471 78034 17312 64532
20416 39723 21340 44449 48730 23154 17676 89375 21030 68737
88034 41700 93954 40962 79558 98678 72320 95124 26893 55730
97045 09595 68440 17555 19881 92180 20640 52905 51893 49475
92600 73485 22821 01088 19464 45442 22318 89131 92946 89622
00230 14437 70269 92300 78030 85261 18075 45192 88770 50210
96842 49362 71359 25187 60777 88466 58361 50238 91349 33331
22310 53392 32136 24319 26372 89106 70503 39928 22652 63556
20902 97986 42472 75977 25655 08615 48754 35748 26471 81414

forholdet mellem diagonal og side i en femkant $= \phi$



Definition To tal, a og b siges at have *fælles mål* hvis der findes et tredie tal c som går heltalligt op i dem begge.

Eksempler 12 og 21 har fælles mål 3.

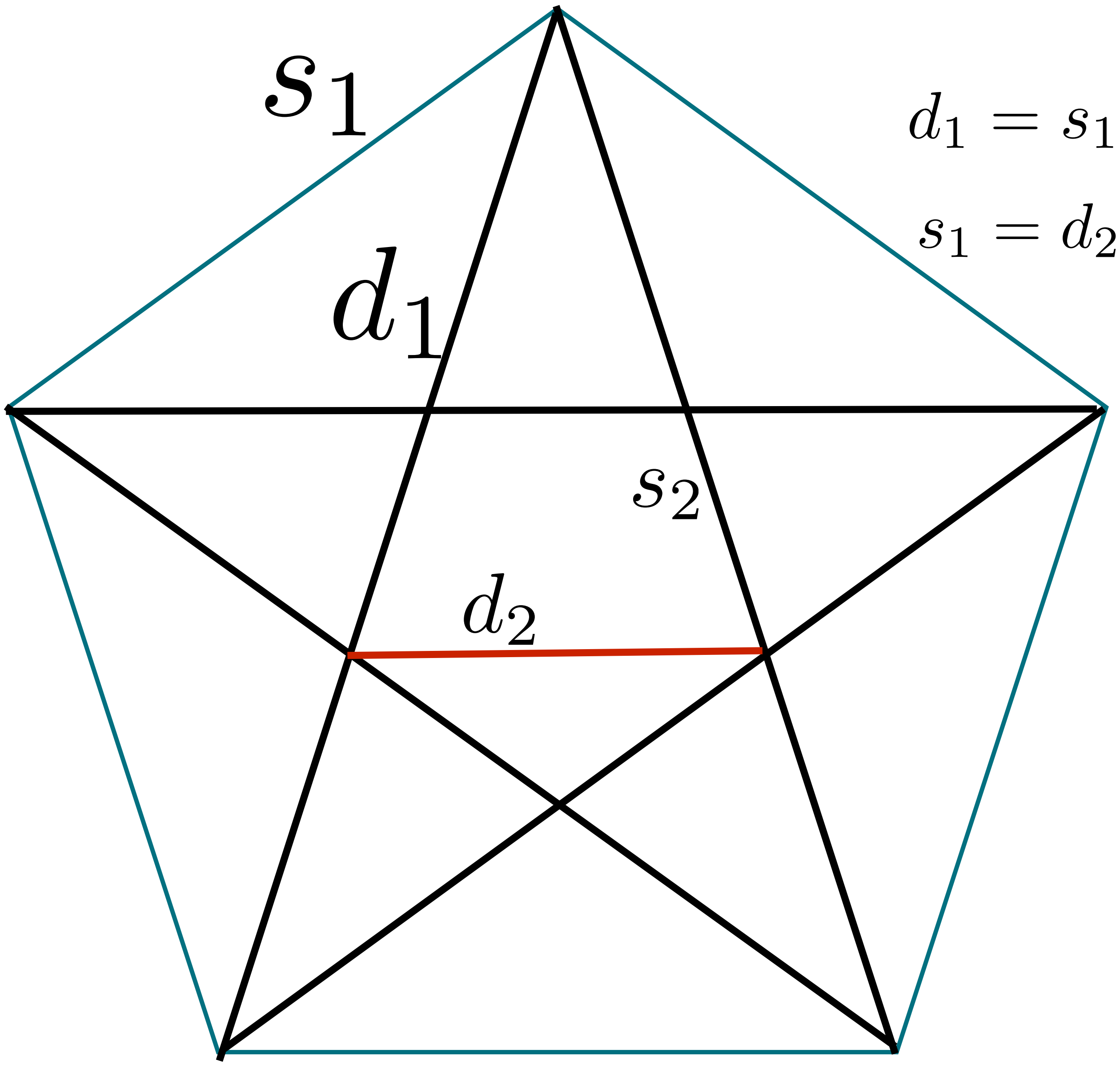
3,9 og 2,6 har fælles mål 1,3.

5 og 7 har fælles mål 1.

Sætning Et tal er rationalt hvis og kun hvis tallet kan skrives som kvotient af to tal med fælles mål.

Sætning Det gyldne snit er *ikke* et rationalt tal

Bevis Betragt følgen af samhørende sider og diagonaler i succesivt indskrevne femkanter:



$$d_1 = s_1 + d_2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = d_1 - s_1$$

$$s_1 = d_2 + s_2 \quad \Rightarrow \quad s_2 = 2s_1 - d_1$$

Bevis Betragt følgen af samhørende sider og diagonaler i succesivt indskrevne femkanter.

Da gælder:

$$d_2 = d_1 - s_1$$

$$s_2 = 2s_1 - d_1$$

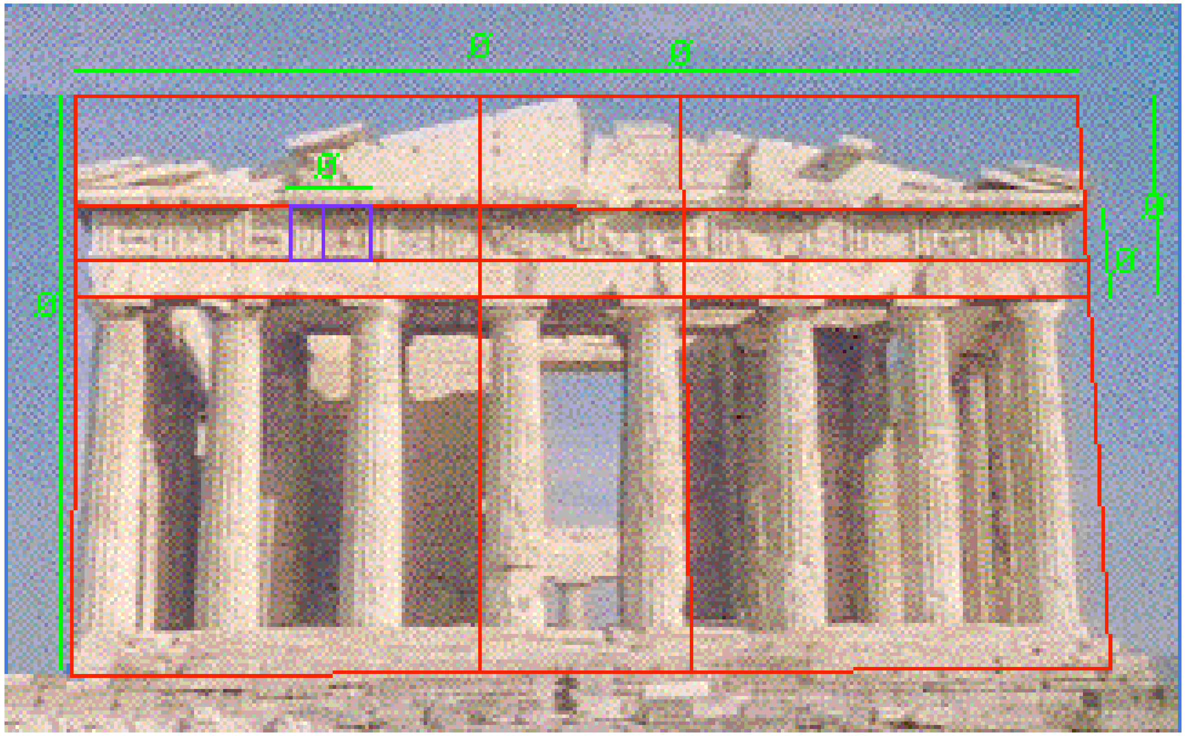
Hvis d1 og s1 havde et fælles mål, ville d2 og s2 have det *samme* fælles mål. Dette tal *c* ville da også være fælles mål for d3 og s3, osv. Det er umuligt; på et tidspunkt bliver d*n* og s*n* mindre end *c*.

$\blacksquare$

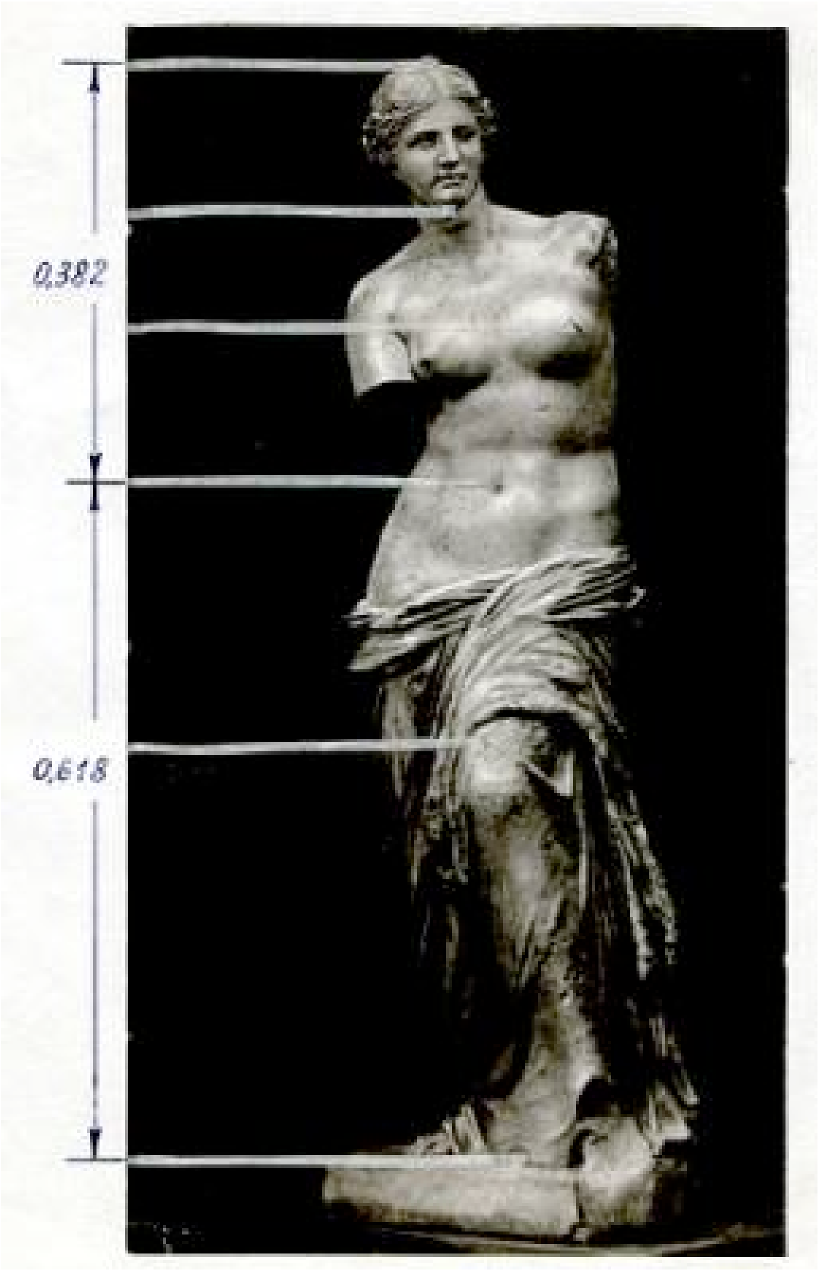
DTU

ϕ i arkitektur og billedkunst

Partenon



Venus

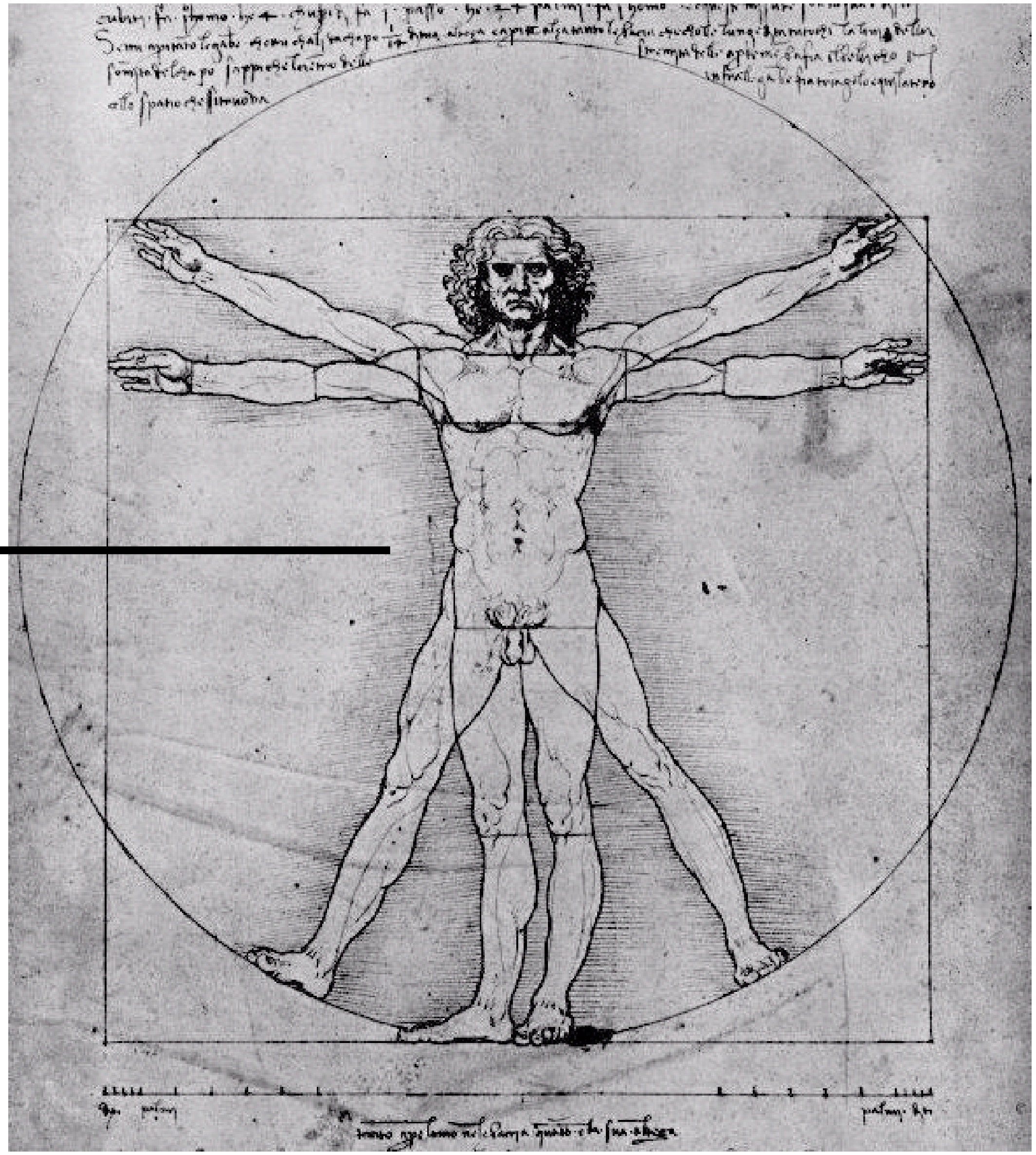


Leonardo da Vinci (1452-1519)

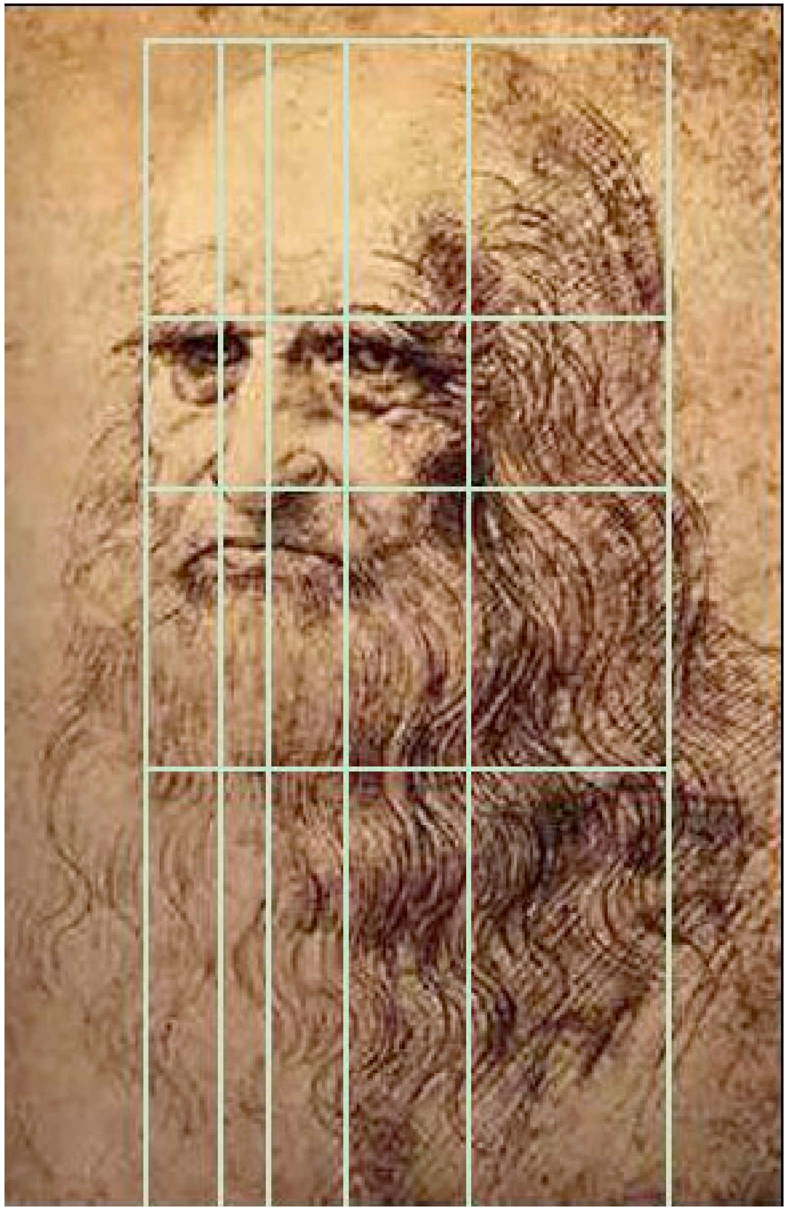
1

0,618034..

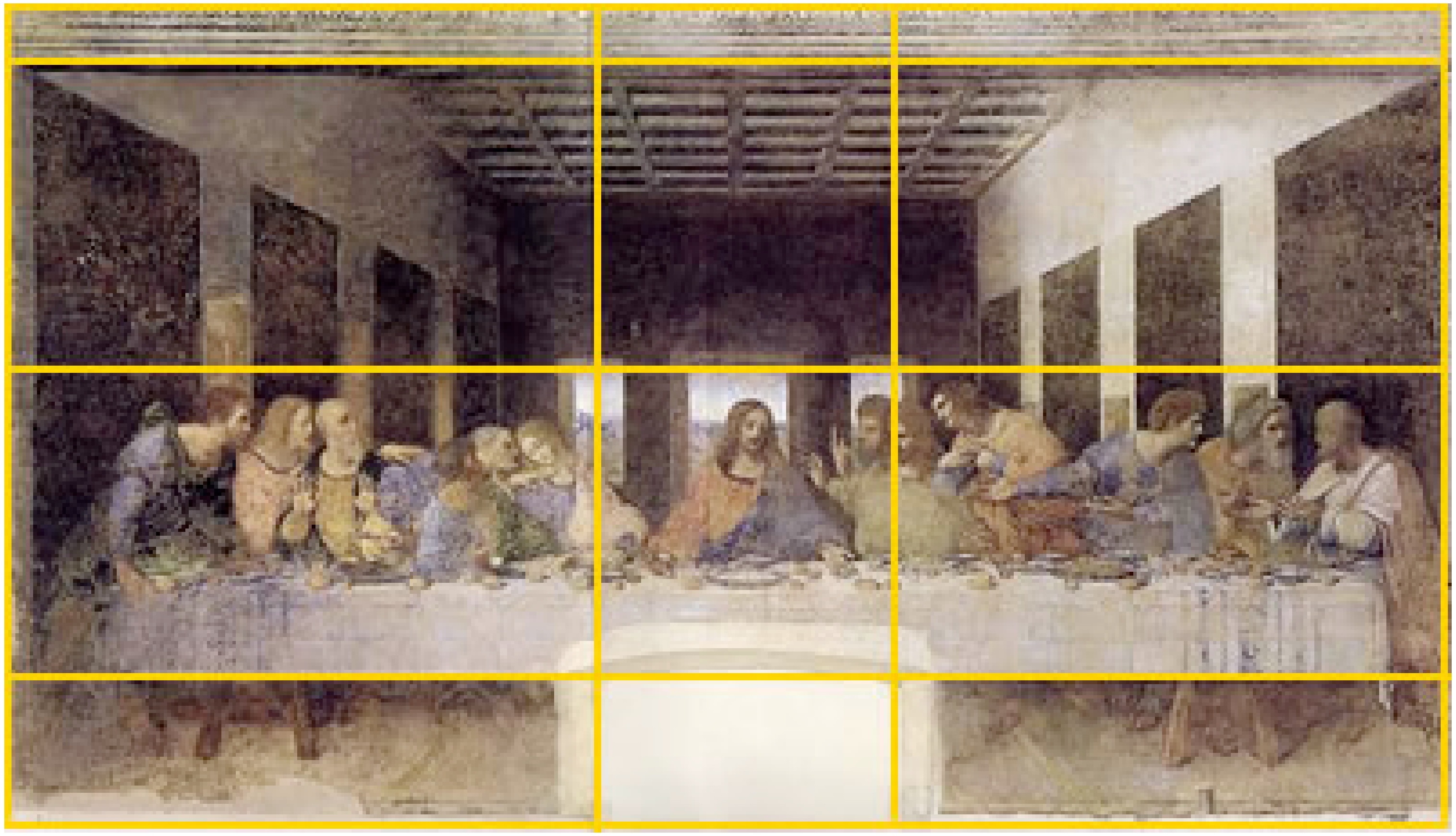
?



En Gammel Mand



Sidste Nadver



Luca Pacioli (1445-1517)

Pacioli: *Divinia Proportione (ca 1499)*

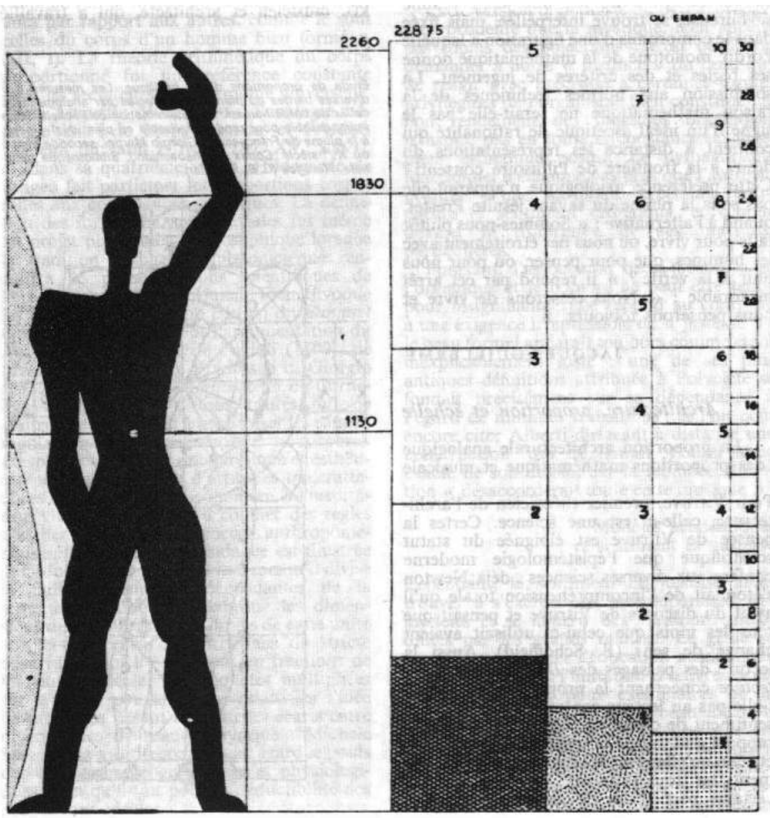
Pacioli møder da Vinci ca 1496 - *efter* de flerte af da Vinci's hovedværker er produceret.

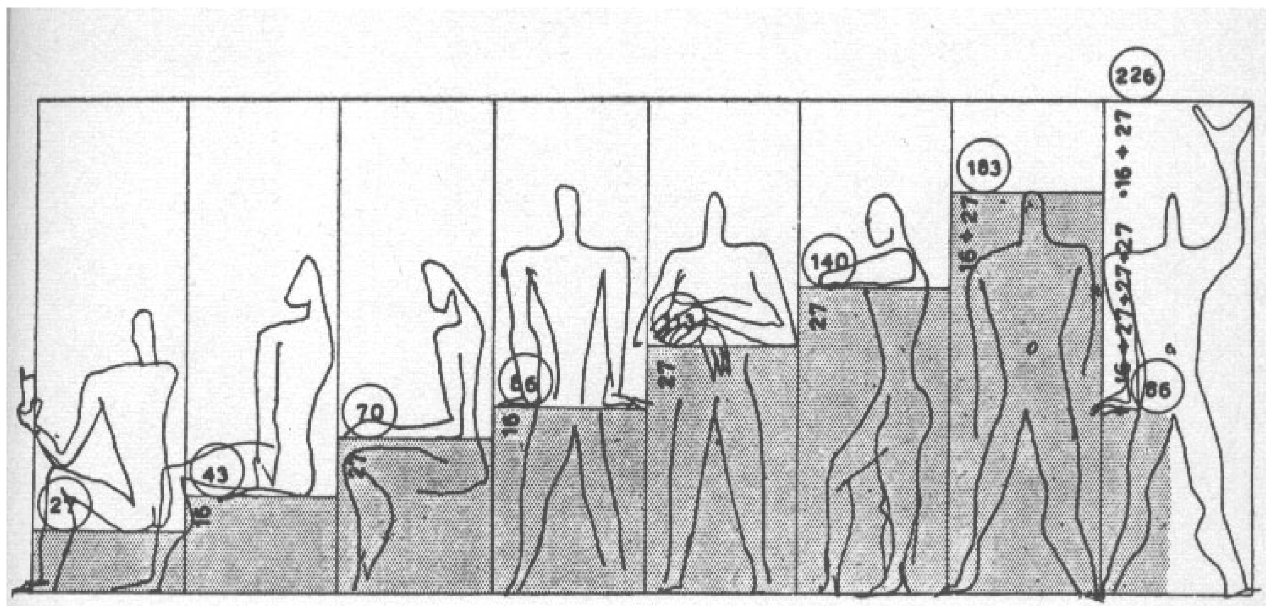
I 1835 udkom Martin Ohm's *Die Reine Elementarmatematik* (2. udgave) med fodnoten: "Man kalder almindeligvis denne deling af et linjestykke for *det gyldne snit*"

Det er såvidt vides første gang udtrykket 'det gyldne snit' er brugt. I engelsk litteratur først fra 1872.

Zeising's Der Goldene Schnitt (1884) er de første værk hvor ϕ bliver voldsomt æsteticeret og fortolket.

Corbusier: *Modulor*



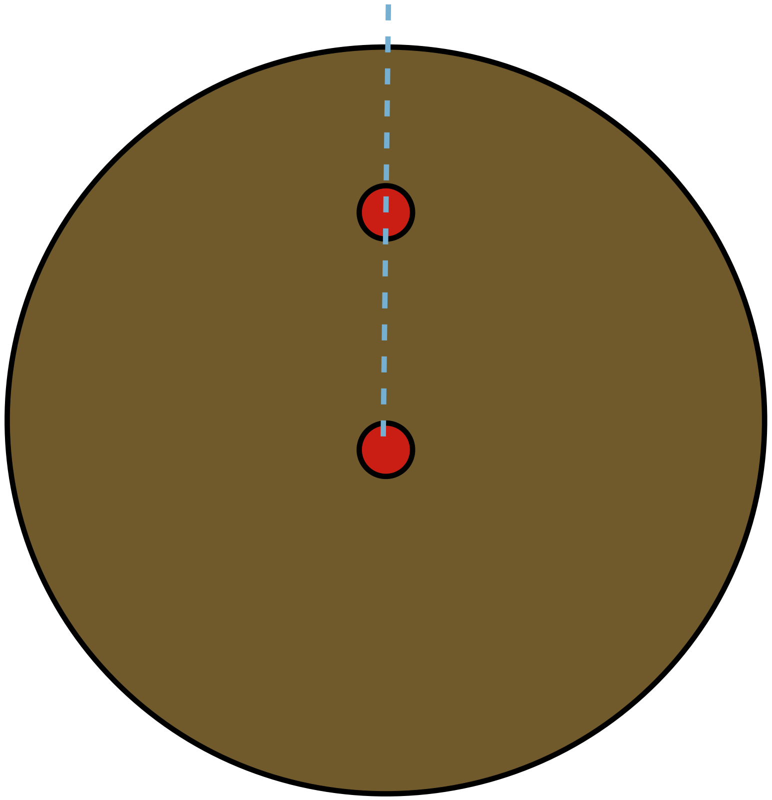


Moderne tider

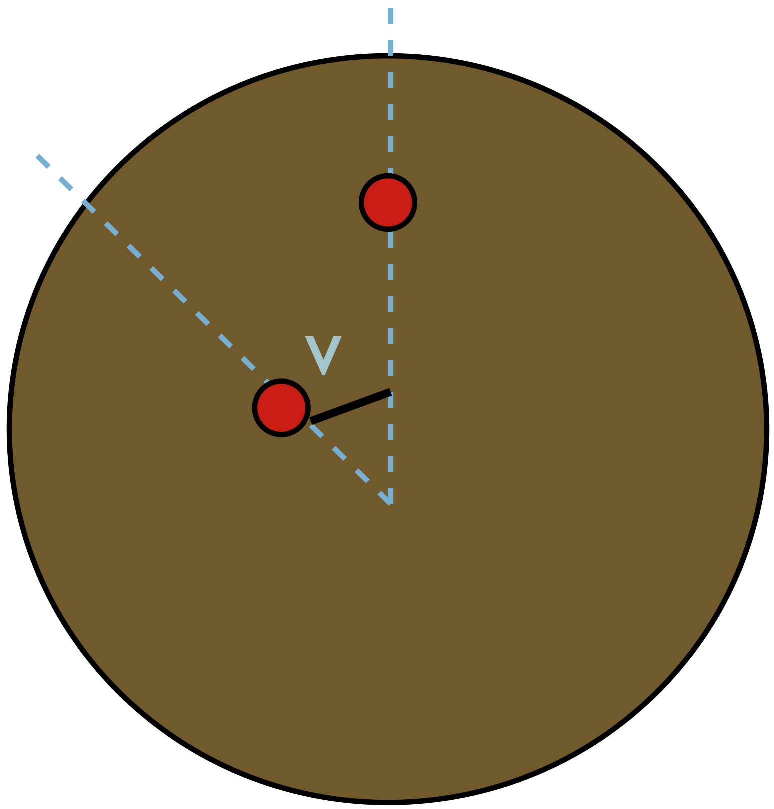
Salvadore Dali: Den Sidste Nadver

Solsikkens spiraler

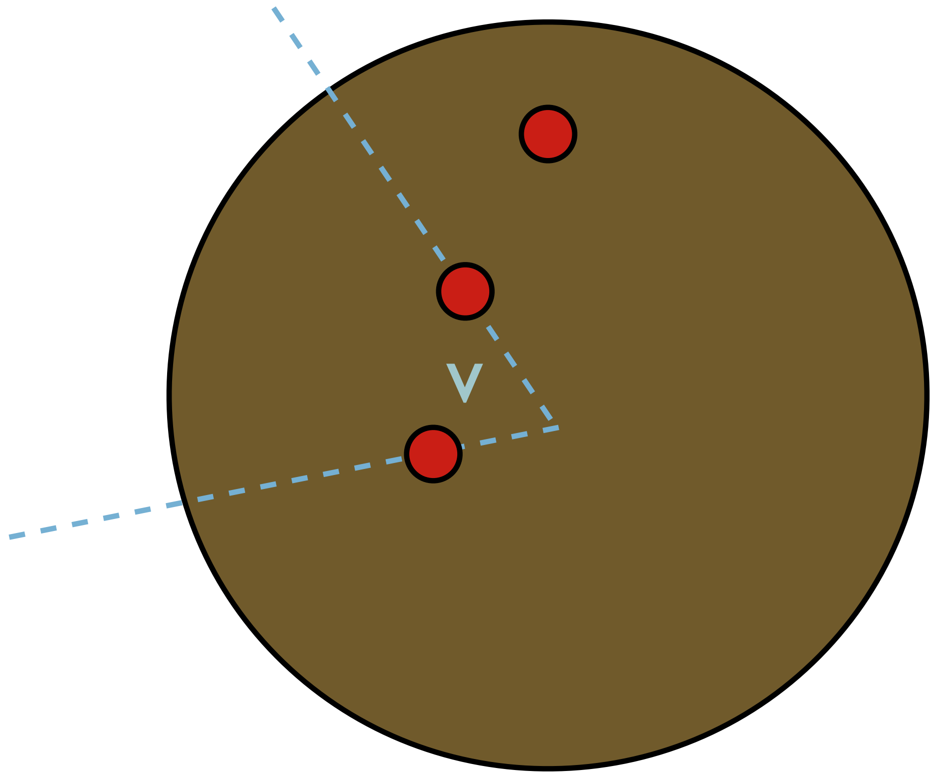
Hvordan vokser frøene frem ?



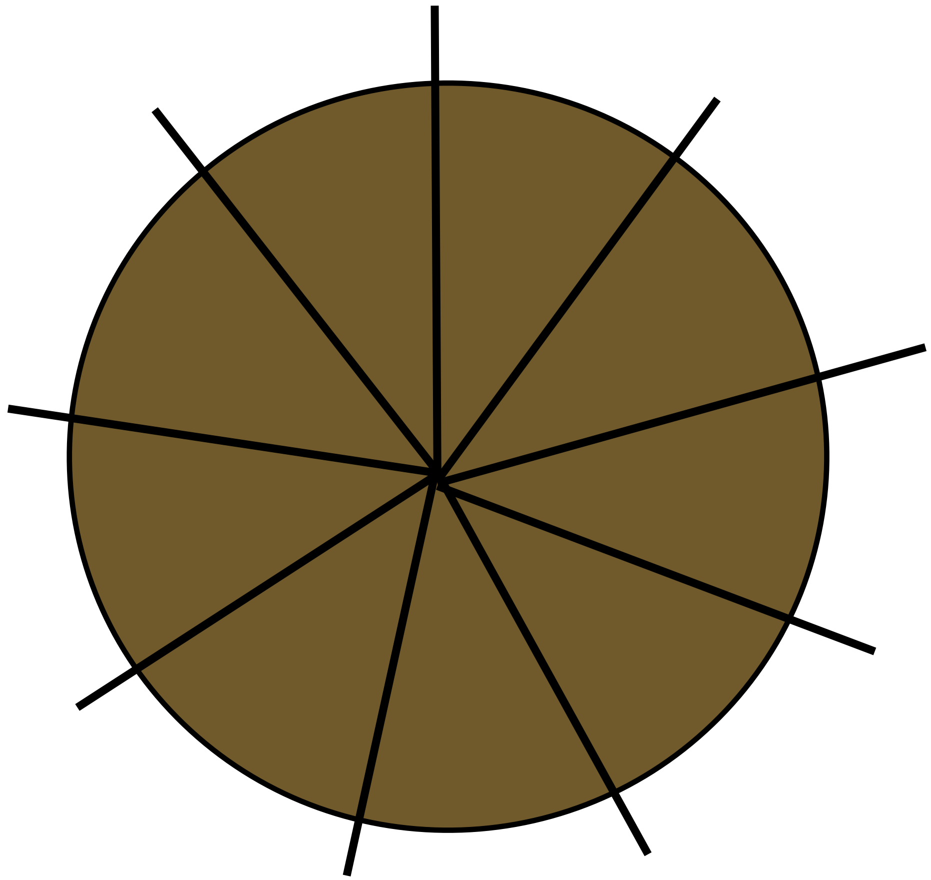
Hvert frø dannes i centrum og bevæger sig derefter væk fra centrum langs en ret linje.



Det næste frø dannes også i centrum men bevæger sig væk fra centrum langs en linje som danner en vinkel v med det foregående frø.



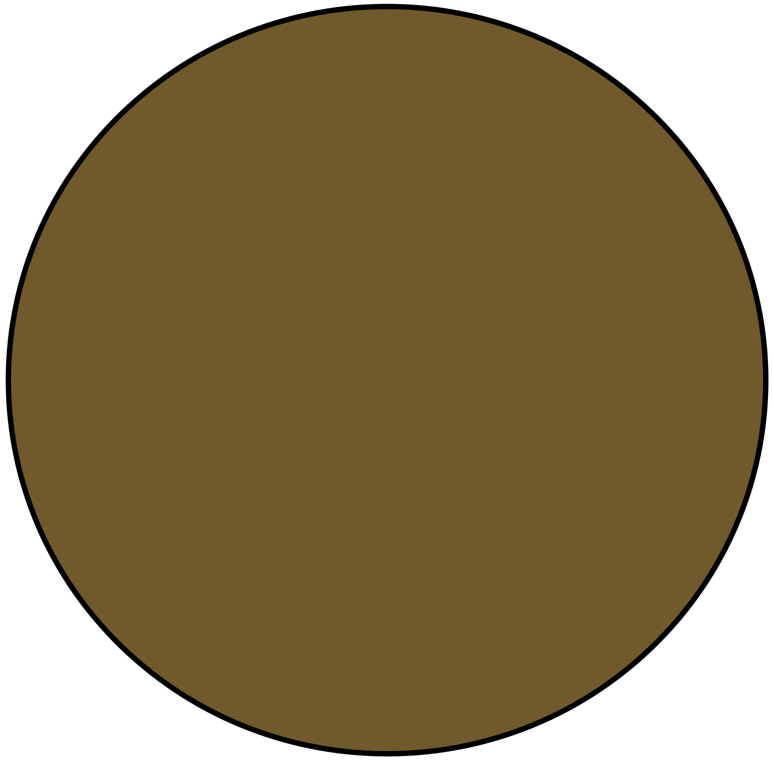
Det næste frø igen bevæger sig udefter langs en linje som igen danner en vinkel v med det foregående, o.s.v.



Hvilken brøkdel af 360° er vinklen v ?

Hvis vinklen var en rational del af 360°, fx 1/9 af 360° ....

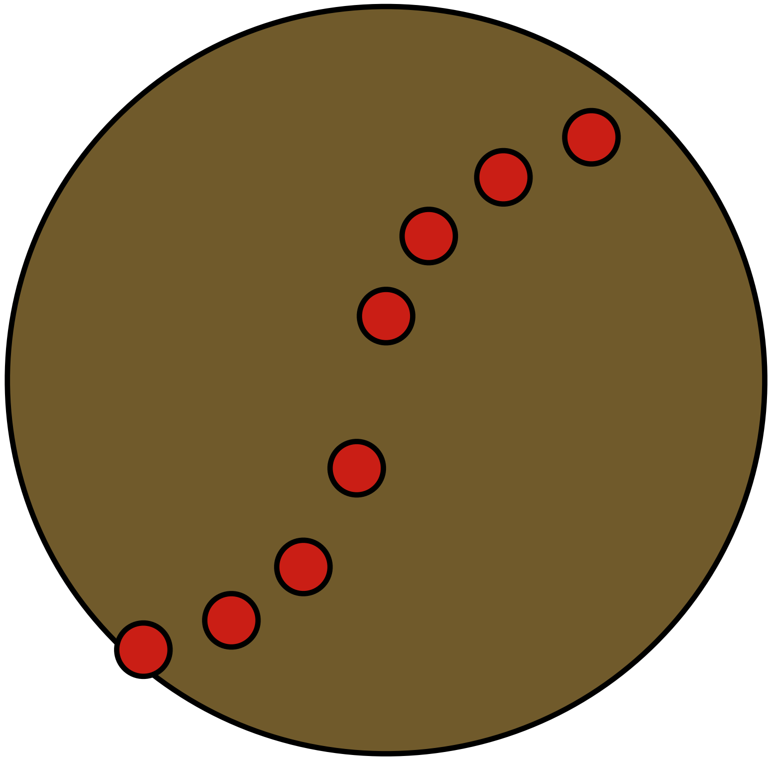
Sådan en drejningsvinkel v ville ikke pakke frøstanden særlig godt - der ville være plads mellem ‘strålerne’.



Et *ikke-rationalt* tal er mere effektivt end et rationalt tal.

Men nogle irrationale tal er mere effektive end andre irrationale tal

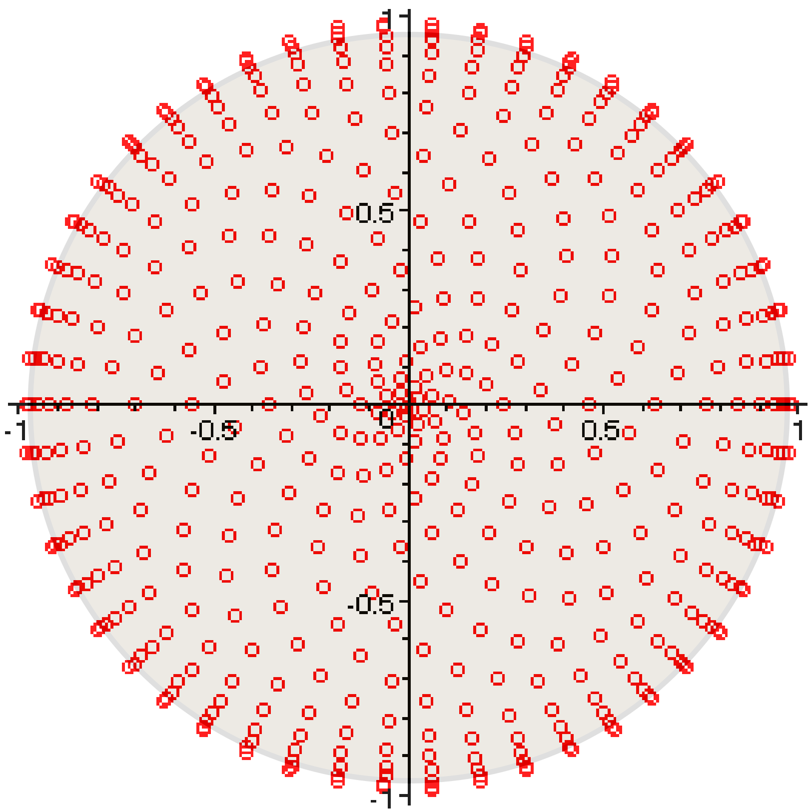
Med et endeligt antal frø, hvis drejningstallet er nær ved et rationalt tal, opstår en spiral.



Hvis fx drejningstallet er en anelse mindre end 1/2 gange 360°

Således vil et irrationalt tal *som er tæt ved et rationalt tal med lille nævner* generere spiraler.

Antallet af arme i spiralmønsteret er nævneren i det rationale tal som drejningstallet er tæt på.



.620 =31/50

≈ 3/5

≈ 5/8

Hvis det rationale tal er *større* end drejningstallet bøjer spiralarmene med uret.

Hvis det rationale tal er *mindre* end drejningstallet bøjer spiralarmene mod uret.

For et lille antal, *n* frø, vil rationale tilnærmelser af orden *n* vise sig i mønsteret, tydeligere *jo nærmere det rationale tal med nævner n er til* v/360°.

Der findes et tal mellem 0 og 1 som modstår rationale tilnærmelser (op til en given nævner) *bedre en nogen andre tal.*

Så hvis man bruger dette tal som drejningstal, får man, selv for et endeligt antal frø, den mest effektive pakning af frø i frøstanden.

Dette tal mellem 0 og 1 har været kendt siden oldtiden

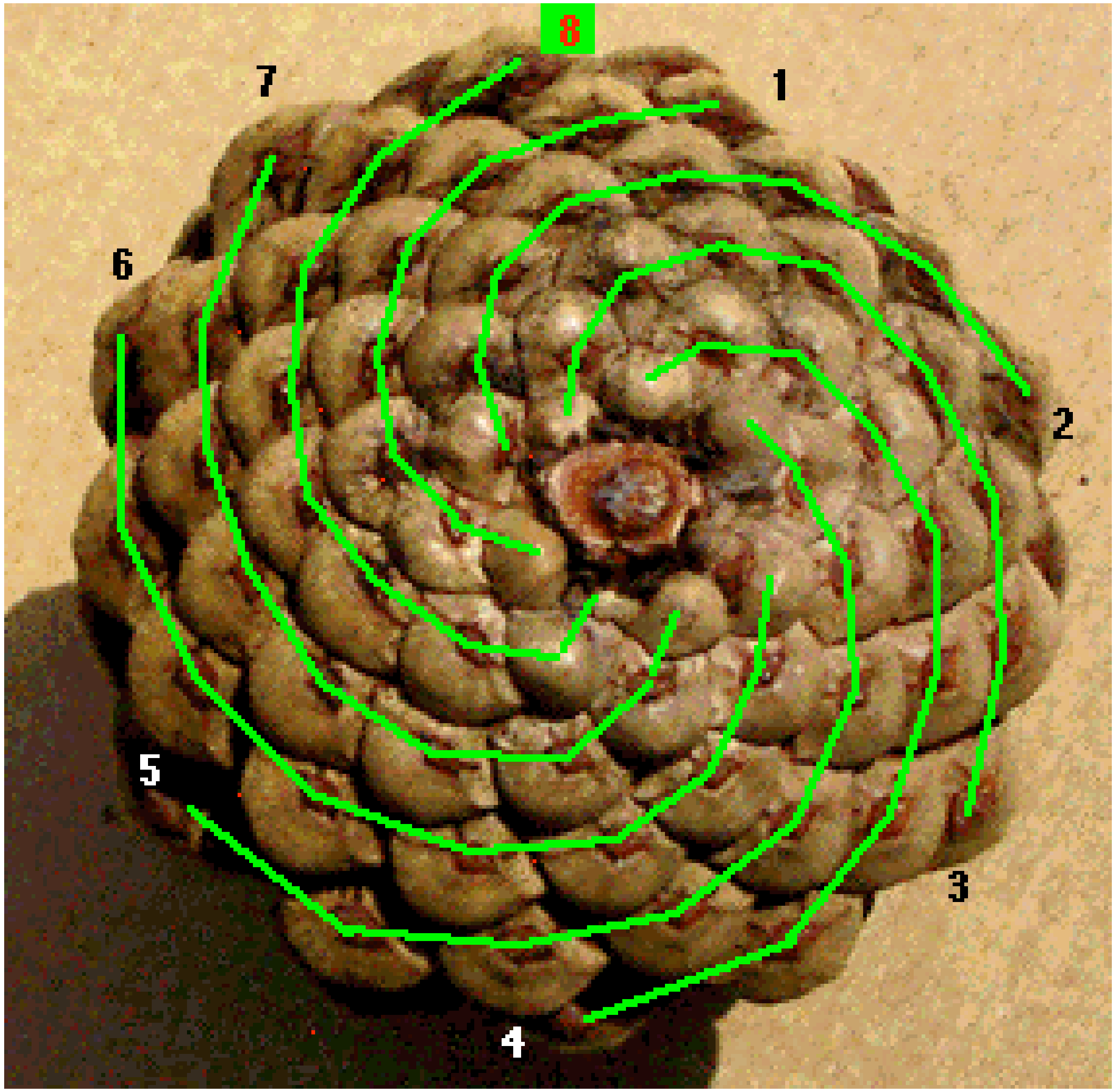
Det har mange geometriske og talteoretiske egenskaber

Tallet er selvfølgelig ϕ

$= 0,618033989.......$

Det viser sig, at de rationale tal der, op til en given nævner, bedst tilnærmer det gyldne snit, har nævnere som er *Fibonacci-tal*

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$


8
7
1
6
2
5
3
4

The End