Dynamikkens differentialligninger

fra Newton til Jacobi

FOLKEUNIVERSITETET
20. NOVEMBER 2007

Poul G. Hjorth
Institut for Matematik
Danmarke Tekniske Universitet

Dynamikkens differentialligninger

fra Newton til Jacobi

- 1:Grupper, klasser og løsninger af differentialligninger
- 2: Newton dynamik
- 3: Hamilton-Jacobi dynamik

For funktioner af *en* variabel kan man danne *ordinære* differentialligninger (ODE)

$$F(\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}, \frac{\mathrm{d}^{n-2} y}{\mathrm{d}x^{n-2}}, \cdots, y(x)) = 0$$

Den højst forekomne afledede i ligningen kaldes ligningens *orden*.

Exempel: $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y(x) = 0$$

For funktioner af *flere* variable kan man danne *partielle* differentialligninger (PDE)

$$F\left(\frac{\partial^n y}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_k}, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_k}, \cdots, y(x_1, ..., x_k)\right) = 0$$

Exempel: $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \kappa \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

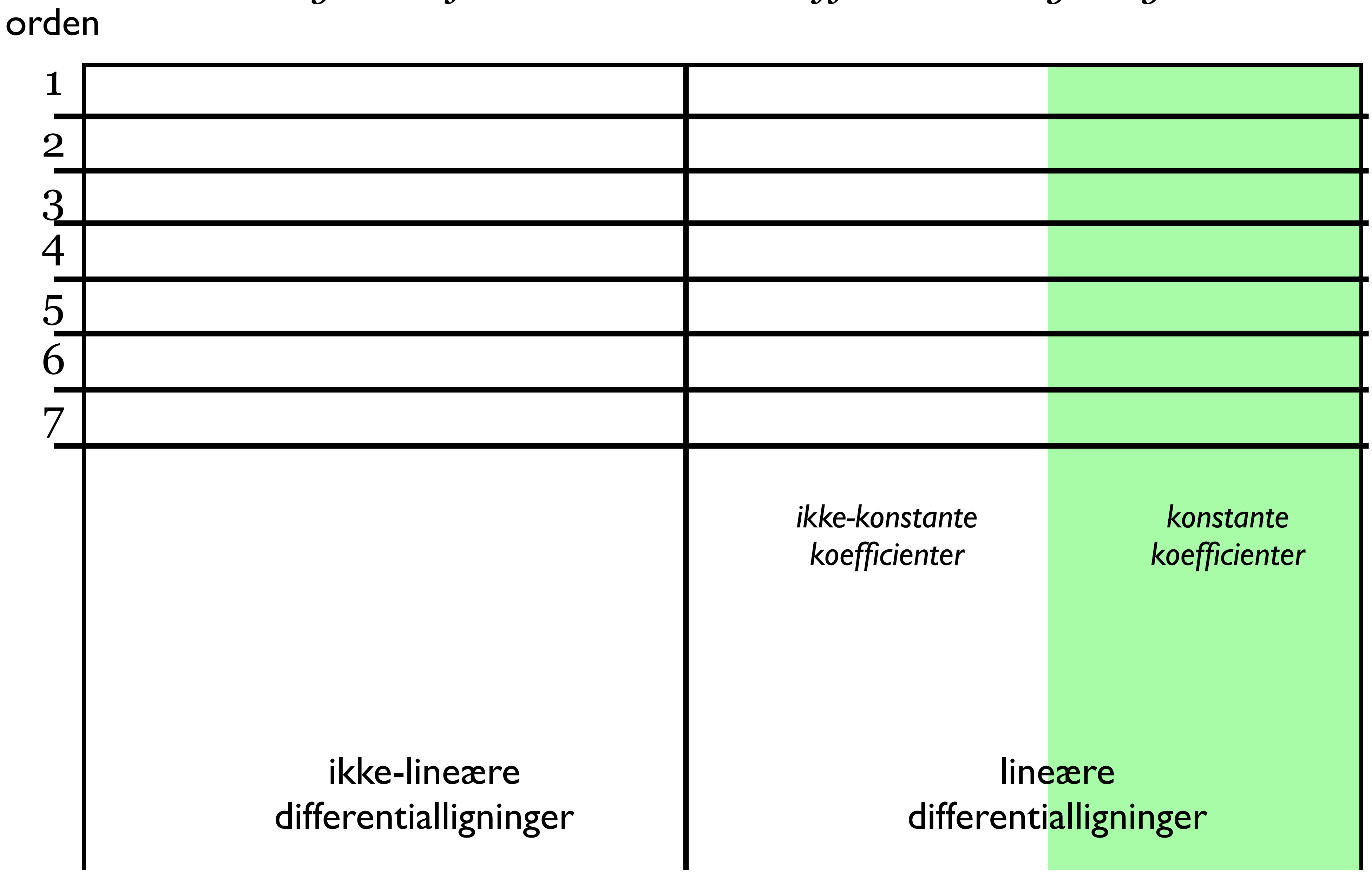
Hvis funktionen F er et *lineært* udtryk i den afhængige variable y, dvs er af form

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) + a(x) = 0$$

siges differentialligningen at være *lineær*.

Hvis ikke, er differentialligningen *ikke-lineær*.

Mængden af alle ordinære differentialligninger



Typer af differentialligninger med løsningsformler

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y)\cdot g(x)$$

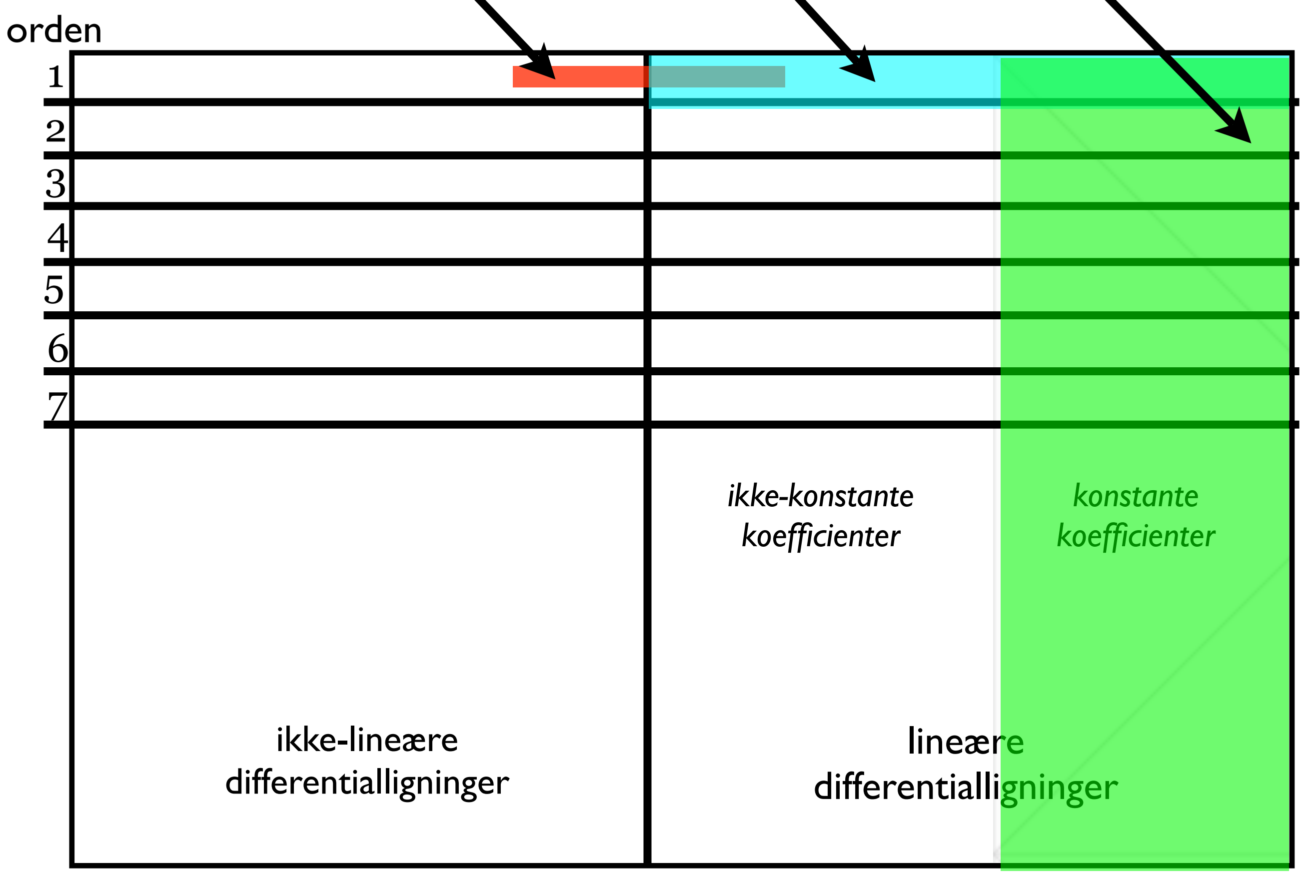
separable

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)\cdot y(x) = q(x)$$

lineære første ordens

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0 y(x) = q(x)$$

lineære, med konstante koefficienter



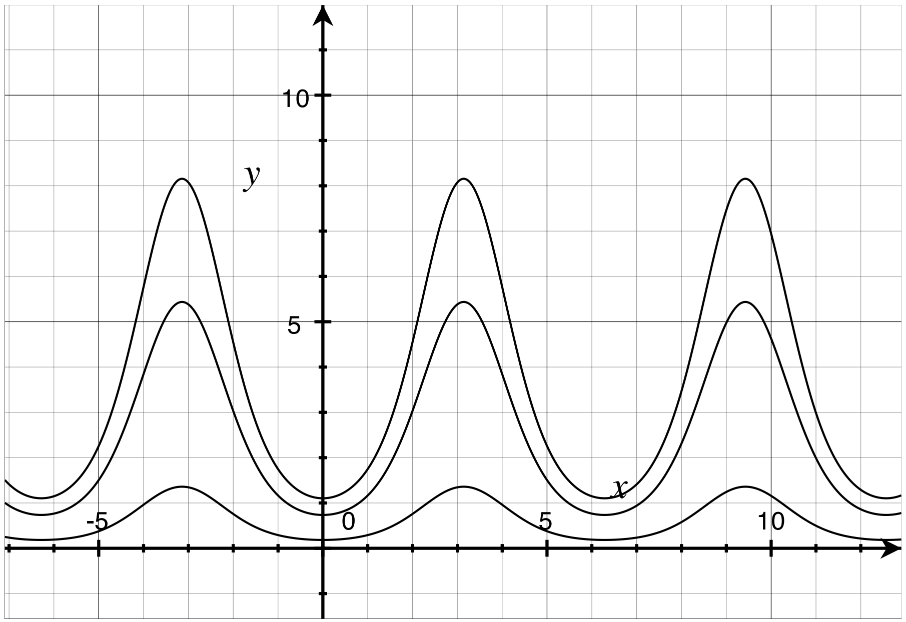
Exempel på separation af de variable:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \sin(x)$$

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int \sin(x)\mathrm{d}x$$

$$\ln(y) = -\cos(x) + C_1$$

$$y = C_2 \exp(-\cos(x))$$

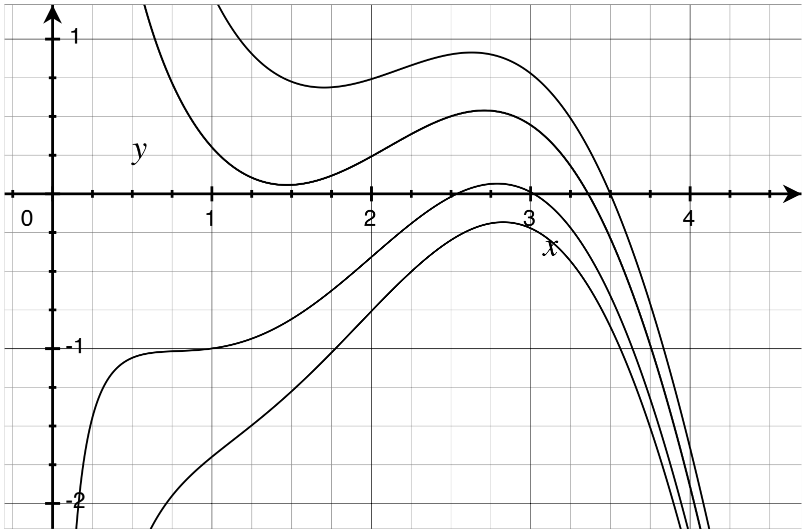


Eksempel på lineært 1. ordens system:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \sin(x)$$

$$y(x) = \exp\left(-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)\left\{\int \exp\left(\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)\sin(x)\ \mathrm{d}x\right\}$$

$$y(x) = \frac{1}{x}\left\{x\sin(x) - x^2\cos(x) + c\right\}$$



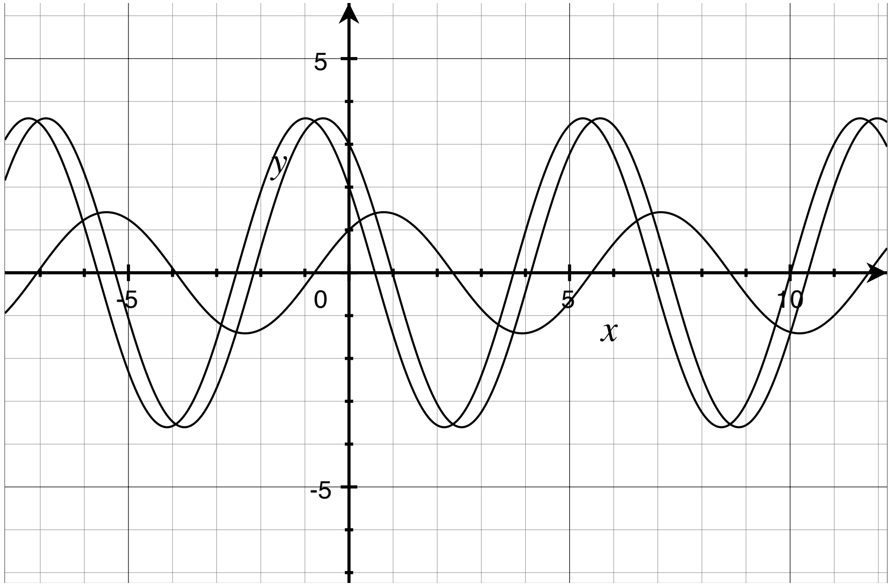
Eksempel på lineært 2. ordens system med konstante koefficienter:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$$

$$R^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R = \pm i$$

$$y(x) = k_+ e^{R_+} + k_- e^{R_-}$$

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$



2: Bevægelsesligninger

Isaac Newton (1642-1730)

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

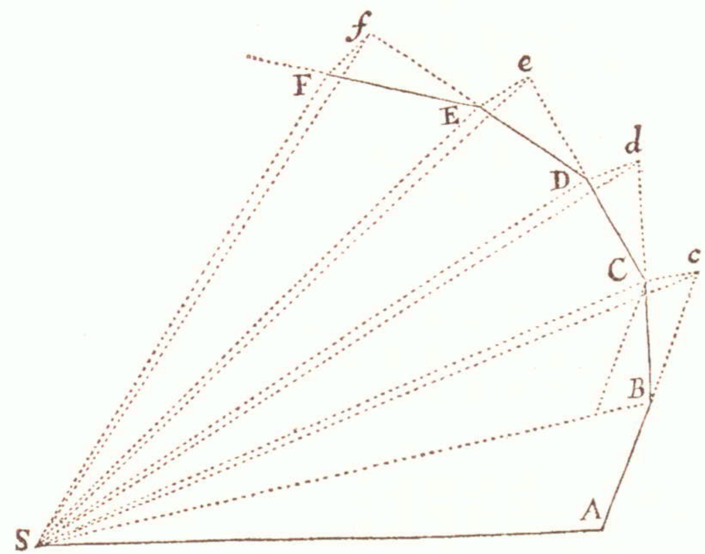
SECT. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *A*B, adeo ut radiis *AS*, B*S*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *A S*B, B *Sc*. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatq; corpus a recta B*c* deflectere & pergere in recta B*C*. Ipsi B*S* parallela agatur *cC* occurrens B*C* in *C*, & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo A*SB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas S*B*, *Cc*, æquale erit trian-



Newtons kraftlov (1686)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F(x, \dot{x}, t)$$

$$p = m\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$$

Exempel: <u>Konstant</u> kraft

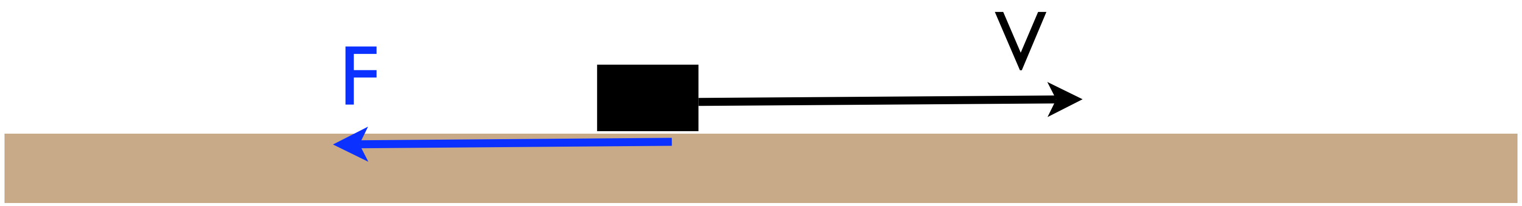
$$a = \frac{F}{m}$$

$$\ddot{x} = a$$

$$\dot{x} = at + (\dot{x})_0$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + (\dot{x})_0 t + (x)_0$$

Exempel: Bremselængde for en bil



Vi kalder bremselængden *L*, starthastigheden *V*, og bremseaccelerationen *a*

Først beregner vi bremsetiden t ved hjælp af hastighedsformlen :

$$0 = -at + V \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{V}{a}$$

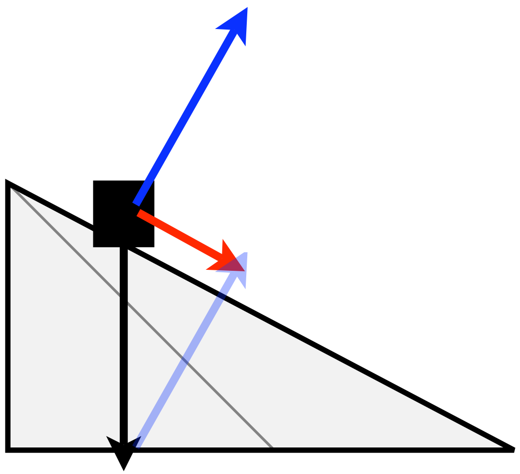
Så indsætter vi den værdi for t i afstandsfomlen :

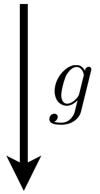
$$L = -\frac{1}{2}a\left(\frac{V}{a}\right)^2 + V\left(\frac{V}{a}\right) \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{V^2}{2a}$$

Konklusion: *Bremselængden øges kvadratisk med hastigheden.*

Hvis bremselængden er 5 m ved 20 km/t , er den ved 60 km/t 45 m !

Exempel: Skåplanet

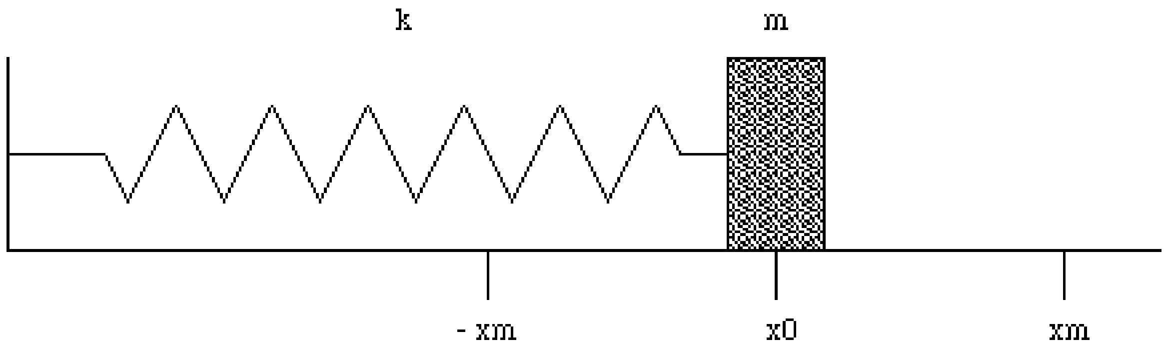




$$\ddot{x} = g\sin(\alpha)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)\ t^2$$

Exempel: Harmonisk Oscillator



Newton: $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -x$$

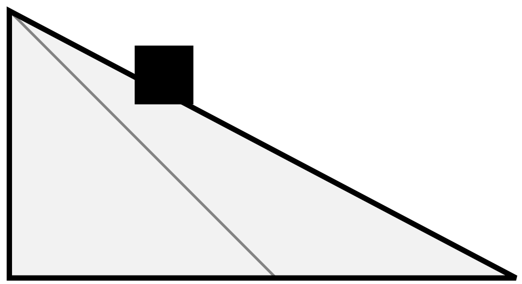
$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

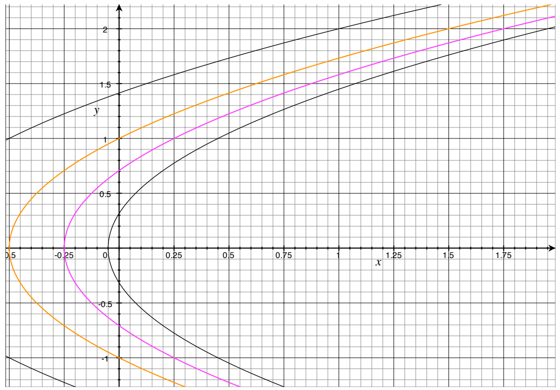
W. R. Hamilton (1807-1862)

C.G.J. Jacobi (1804-1851)

Analytisk (Rationel) Mekanik

Exempel: Skåplanet

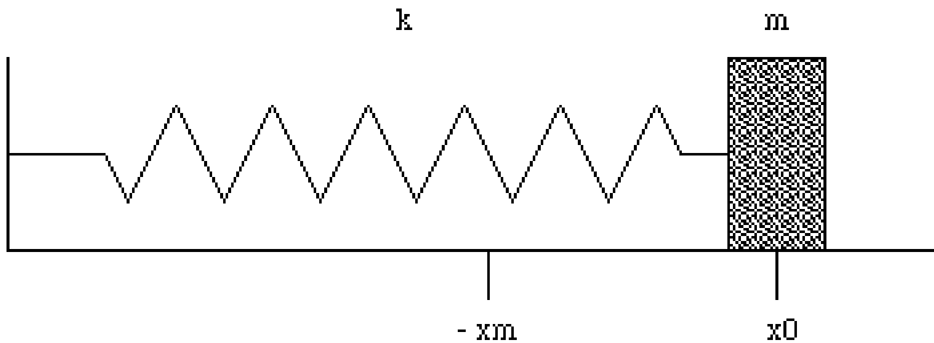


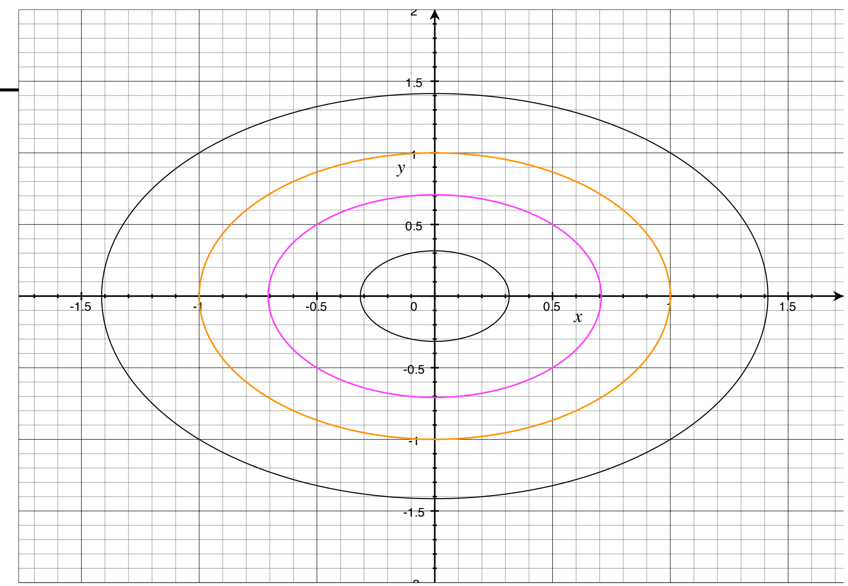


$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} - mgx\sin(\alpha)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= mg\sin(\alpha)\end{aligned}$$

Exempel: Harmonisk Oscillator





Hamilton-Jacobi: $$H(x,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{p} &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= x^2 + p^2 \\ \tan\varphi &= \frac{p}{x} \end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2} I$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t \\ I(t) &= I(0) \end{aligned}$$

Transformationen $(x, p) \quad \rightarrow \quad (\varphi, I)$

viser at systemet er *fuldstændigt integrabelt*

Når systemet opskrives i disse variable ser man det maksimale antal bevægelses-konstanter, og bevægelsen udtrykt i disse koordinater er simpel.

Hamilton og Jacobi viste at mekaniske systemers opførsel kan udredes ved passende valg af koordinater. I stedet for direkte at søge en løsning til de differentialligninger der opstår ved et tilfældigt valg af koordinater, søger Hamilton og Jacobi efter den koordinat-transformation der simplificerer systemet mest muligt.

Der opstår herved en analogi mellem på den ene side lysbølgers bølgeudbredelse og (‘geometrisk optik’) og på den anden side mekaniske fænomener. Herved grundlage Hamilton og Jacobi hvad der i dag kaldes geometrisk mekanik, og kom meget tæt på at skabe et matematisk grundlag for kvantemekanikken.

SLUT